DISSERTAZIONE CHE IL SOTTOSCRITTO COMPILAVA PEL CONCORSO...

Clemente Pollina

DISSERTAZIONE

CHE IL SOTTOSCRITTO COMPILAVA

PEL

CONCORSO ALLA CATTEDRA DI FISICA

nella R. Università di Bologna

SULLE LEGGI DEI MOVIMENTI

UNIFORME ED UNIFORMEMENTE ACCELERATO

APPLICATE ALLA GRAVITÀ

PISA

TIPOGRAFIA PIERACCINI
diretta da Santi Soldaini
1871

La dinamica riduce sempre la considerazione di ogni genere di movimento a quelle del moto uniforme, e del moto uniformemente accelerato. — Le leggi quindi che si riferiscono all'argomento proposto sono basi su cui s'eleva il grande edifizio dinamico, e ne assumono l'importanza.

Allorchè la causa del movimento, che chiamiamo forza, agisce sopra un corpo, che pel momento ammetto costituito da un sol punto materiale, la sua azione può limitarsi al tempo necessario perchè il corpo cominci a muoversi; può invece, dopo averlo miso in movimento, accompagnarlo in tutto il corso della trajettoria. — Da ciò la distinzione delle forze, come ordinariamente si dice, in istantanee e continue. A dir il vero non v'hanno forze istantanee. In natura ogni causa deve impiegare un certo tempo più o meno lungo, apprezzabile o no dai nostri sensi, perchè un effetto abbia luogo. Quindi la forza detta istantanea potrebbe

chiamarsi forza iniziale. In ogni caso essa deve agire pel tempo necessario alla comunicazione del movimento, altrimenti spingerà innanzi le molecole del corpo, che ricevono direttamente l'azione, senza muovere le altre.

Quando adunque una forza iniziale agisce sopra un punto materiale, questo si mette in moto, ed un tale movimento non può essere che uniforme e rettilineo; se ciò non fosse il corpo dovrebbe nel corso del suo moto, senza l'aggiunta di un'altra causa, variare la direzione o l'energia del movimento; il che è contrario a quella proprietà generale della materia, che dicesi inerzia, la quale può considerarsi come un caso speciale del principio fondamentale posto da Galileo della composizione de' movimenti, solennemente dimostrata dal moto de' corpi celesti.

Nel movimento uniforme si considerano tre elementi, la velocità, lo spazio ed il tempo impiegato a percorrerlo, intendendosi per velocità l'attitudine a traversare più o meno rapidamente un certo spazio, la quale, siccome è proporzionale e perciò misurata da questo, viene indicata colla lunghezza dello spazio percorso nell'unità di tempo.

Così essendo, lo spazio percorso dee crescere nella stessa ragione del tempo impiegato a percorrerlo, e la formola $s = vt$ esprime le relazioni esistenti fra i tre elementi del moto uniforme. Di conseguenza lo spazio è uguale in numero alla superficie del rettangolo di cui gli altri due elementi sono i lati.

Ma qual rapporto esiste fra la forza e la velocità impressa al punto materiale, fra la causa e

l'effetto? Un tal rapporto potrebbe essere qualunque, quello della semplice proporzionalità, quello dei quadrati od altro; ma l'esperienza e l'osservazione ci dimostrano, che le forze sono semplicemente proporzionali alle velocità comunicate a masse uguali, che come tali possono sostituirsi ai punti materiali, su cui hanno agito per tempi uguali e con energia costante — Invero il fatto, che il movimento relativo di due o più corpi uguali non è punto alterato, per l'aggiunta di forze parimenti uguali, non s'accorda con nessun'altra legge, tranne quella della semplice proporzionalità.

Le forze adunque che agiscono sopra punti materiali, o sopra corpi di uguale massa, che vale lo stesso, per tempi uguali e con energia costante sono misurate dalle velocità che gli comunicano.

Ho esteso la considerazione dei punti materiali a quella dei corpi aventi masse uguali perchè credo, che la deduzione fatta sia bene applicabile ad entrambi i casi, stantechè la variazione della causa sopra masse uguali dee produrre proporzionale variazione nell'effetto colla legge anzidetta.

Il criterio poi per fissare l'uguaglianza delle masse può bene stabilirsi dall'eguaglianza degli effetti prodotti da una stessa causa, di guisa che possono dirsi e si dicono masse uguali quelle, che in parità di circostanze ricevono o possono ricevere dall'azione di una medesima forza uguali velocità.

Facciamo variare ora la massa del corpo da muoversi e vediamo quello che dee accadere.

Si è detto, che due forze uguali comunicano a due punti materiali, od a corpi d'uguali masse

uguali velocità, da ciò sembra si possa ammettere, che ove le due masse fossero riunite in una bisognerebbe riunire anche le due forze per ottenere la stessa velocità di prima, la quale quindi si produrrebbe con una forza doppia allorchè l'azione avesse luogo sopra una massa doppia, talmentechè possa stabilirsi, che le forze sono proporzionali alle masse alle quali comunicano uguali velocità. Nè vale il dire, che ciò sarebbe applicabile solamente ai corpi della stessa natura, e non a quelli di natura diversa; poichè se la massa atomistica di un corpo fosse doppia, per esempio, di quella di un altro, ciò vorrebbe dire solo che i corpi in discorso avrebbero per masse uguali numeri diversi di particelle indivisibili, cioè il primo un numero metà dell'altro, e numeri uguali pel caso della massa del primo doppia di quella del secondo; ma potendosi applicare all'atomo di massa doppia la considerazione fatta per la riunione di due masse uguali, ne risulta ch'esso ha bisogno di una forza doppia di quella di cui ha d'uopo un atomo dell'altro corpo per muoversi entrambi con uguali velocità; e per conseguenza sarà anche in questo caso vera la proporzionalità delle forze alle masse che hanno ricevuto velocità uguali.

Le forze adunque sono proporzionali alle velocità comunicate a punti materiali od a corpi di uguali masse, agendo in parità di circostanze, e sono altresì proporzionali alle masse a cui comunicano velocità uguali; quindi possono le forze medesime misurarsi col prodotto di questi due elementi, e si ha $F = MV$. Il prodotto MV, chè costituisce

la misura della forza è chiamato quantità di movimento. — Il principio della quantità di moto è uno de' principii fondamentali della dinamica.

Le quantità di moto di due corpi diversi sollecitati da una medesima forza successivamente, o da forze uguali, devono fra loro essere uguali, e perciò si ha in tal caso $MV = M'V'$ ovvero $M : M' :: V' : V$. Coll'azione di una forza qualunque si può quindi stabilire il rapporto fra le masse di due corpi diversi, dovendo le medesime essere in ragione inversa delle velocità che la forza data può comunicare ai corpi che si considerano.

Le forze naturali però hanno generalmente un carattere diverso da quelle che si son fin qui considerate. — Esse agiscono continuamente, e perciò diconsi forze continue od acceleratrici. L'azione continua può essere esercitata con energia costante, ed allora produce un movimento uniformemente vario, che può essere uniformemente accelerato od uniformemente ritardato. È questo il caso che passiamo ad esaminare.

Per dedurre le leggi di questo genere di moto gioverà considerare l'azione continua di una forza come la risultante di una forza iniziale, che agirebbe sul corpo ad intervalli infinitamente piccoli con impulsi sempre uguali, cioè che darebbe al corpo un primo impulso per ispingerlo dalla quiete al moto, e poi l'abbandonerebbe per somministrargli un altro impulso uguale al principio del secondo elemento di tempo, e così di seguito. — Or quando i tempi, in cui si considera scomposta l'azione della forza, sono infinitamente piccoli, la consi-

derazione anzidetta non arreca inesattezza di sorta. Infatti è senza inesattezza che i matematici rappresentano il circolo con un poligono regolare di un numero infinito di lati di lunghezza infinitesima, e la sfera con un poliedro regolare di un numero infinito di piani la cui superficie sia infinitamente piccola. Quindi nella stessa guisa, la successione di tempi uguali ed infinitamente piccoli rappresenta la continuità e l'uniformità.

Si sa inoltre dal principio fondamentale della composizione de' movimenti, che i diversi impulsi, sieno contemporanei o successivi, agiscono sopra di un corpo, per l'intensità e per la direzione, indipendentemente dalle intensità e direzioni degli altri impulsi preesistenti o contemporanei.

Così essendo, supponiamo che una forza continua costante agisca sopra un corpo che trovasi in quiete; dopo un certo tempo questo corpo avrà ricevuto un numero d'impulsi più o meno grande, tutti uguali, e tanti quanti sono i tempi parimente uguali ed infinitamente piccoli da cui si compone il tempo trascorso; ed ognuno di tali impulsi avrà aggiunto nel corpo una velocità sempre uguale a ciascuna di quelle preesistenti e nella stessa direzione delle medesime. Da ciò segue evidentemente che in tal genere di moto le velocità sono proporzionali ai tempi impiegati. E se si designa con g la velocità acquistata dopo un tempo finito, che supponiamo l'unità di tempo, un secondo, si avrà $v = gt$.

Vediamo ora come potrà conoscersi lo spazio percorso in un dato tempo, in rapporto a quello

che vien percorso nell'unità del medesimo. Prendiamo prima in esame l'unità di tempo, nella quale il corpo si muoverà con velocità crescenti nei successivi istanti o tempi elementari, velocità che possono essere rappresentate colla progressione dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, ec.

Gli spazi percorsi dal corpo nei successivi elementi di tempo saranno per conseguenza rappresentati dalla progressione medesima de' numeri naturali. Or se consideriamo l'istante intermedio, quello cioè che corrisponde alla metà del tempo che si considera, è chiaro che per i tempi elementari susseguenti le velocità e gli spazi percorsi saranno successivamente crescenti coll'aumento di 1, 2, 3, 4, ec. e che invece per i precedenti saranno successivamente decrescenti colla diminuzione di 1, 2, 3, 4, ec. di guisa che gli spazi percorsi in tutti questi tempi elementari, o per meglio dire, la loro somma sarà uguale a quella degli spazi che il corpo avrebbe percorso ove si fosse mosso, dal principio fino alla fine del minuto secondo, con velocità uniforme ed uguale alla velocità acquistata dal corpo medesimo dopo la prima metà del tempo, cioè colla metà di quella acquistata alla fine di tutto il tempo.

Or supponiamo, che alla fine del detto tempo la forza continua cessasse d'agire sul corpo, esso, in virtù della velocità acquistata ed in conseguenza di quanto si è detto, percorrerebbe nel successivo minuto secondo, con moto uniforme, uno spazio doppio di quello percorso con moto accelerato nel primo. Quest' ultimo spazio può dunque rappre-

sentarsi con $\frac{g}{2}$, se con g s' indica la velocità finale dopo l'unità di tempo, ma pel momento faremo $\frac{g}{2} = 1$.

Ciò posto, sarà facile vedere quali saranno gli spazi, che il corpo percorrerà ne' successivi minuti secondi, continuando il moto accelerato seguito nella prima unità di tempo.

Al principio della seconda unità di tempo, il corpo ha già una velocità acquistata, e se in tale tempo la forza non agisse, esso percorrerebbe lo spazio 2 con moto uniforme, ma agendo la forza si aggiunge allo spazio 2 l'effetto uguale a quello che fu prodotto dalla forza medesima nella prima unità di tempo, sicchè lo spazio che sarà percorso nel secondo tempo si esprime dal numero 3, di modo che lo spazio percorso in tutti e due i minuti secondi sarà 4.

La velocità acquistata dopo la seconda unità di tempo sarà doppia di quella acquistata alla fine della prima unità, e perciò nella terza unità si percorrerà lo spazio $4+1=5$, nella quarta $6+1=7$ e così di seguito.

Gli spazi percorsi nelle successive unità di tempo sono dunque rappresentati dalla serie de' numeri impari 1, 3, 5, 7, ec. il cui termine sommatorio è dato dal quadrato del numero dei termini. Da ciò segue, che lo spazio percorso dal corpo in un tempo qualunque è dato dal quadrato del tempo impiegato, prendendo per unità di spazio quel-

lo percorso nel primo minuto secondo, od in altri termini si avrà $s = \frac{gt^2}{2}$.

Se dalle due formule $v = gt$ ed $s = \frac{gt^2}{2}$ si elimina la quantità t, si ottiene $v = \sqrt{2gs}$, da cui si potrà ottenere la velocità del mobile senza conoscere il tempo impiegato nel suo movimento.

Gl'impulsi successivi della forza continua sono evidentemente proporzionali all'intensità della forza stessa, come lo sono alla velocità acquistata dal mobile dopo un dato tempo. Da ciò emerge, che le forze continue costanti possono essere misurate e rappresentate dalla velocità che comunicano al mobile alla fine dell'unità di tempo. E poichè si è conosciuto, che lo spazio percorso nella prima unità di tempo è $\frac{g}{2}$, la forza continua in esame sarà rappresentata dal doppio dello spazio medesimo, od in altri termini, essendo $s = \frac{gt^2}{2}$, sarà $g = \frac{2s}{t^2}$, e pel caso di $t = 1$ $g = 2s$.

Le leggi esposte si riferiscono, come fu detto, al caso che la forza continua costante cominci la sua azione sopra un corpo che trovasi allo stato di quiete. Supponiamo adesso che la forza medesima agisca su di un mobile, a cui fu comunicata da una forza iniziale la velocità a in direzione precisamente opposta a quella della forza continua. Il corpo allora si muoverà nella direzione della forza iniziale con moto uniformemente ritardato, in conseguenza delle sottrazioni uniformi e continue, che saran-

no nella velocità a operate da quella forza continua, che qui prende il nome di ritardatrice.

Alla fine di un tempo t la sua velocità è data dall'equazione $v = a - gt$, e lo spazio percorso dall'istante in cui cominciò ad agire la forza continua si ottiene da $s = at - \frac{gt^2}{2}$. E ciò fino a che non si giungerà ad avere $a = gt$. Allora si avrà $t = \frac{a}{g}$, dopo percorso lo spazio $s = \frac{a^2}{2g}$.

In quest' istante il corpo si fermerà, e continuando ad agire la forza continua esso ritornerà sui propri passi con moto uniformemente accelerato, come qualunque altro mobile, che si partisse dallo stato di quiete, acquistando successivamente le velocità perdute, ma in senso contrario; di guisa che dopo un tempo uguale al primo, cioè $\frac{a}{g}$, avrà percorso lo stesso spazio ed acquisterà la stessa velocità in senso contrario.

Infatti sostituendo $t = \frac{a}{g}$ nelle due formule $v = gt$ ed $s = \frac{gt^2}{2}$ si ottiene $s = \frac{a^2}{2g}$ e $v = a$.

Esposte le leggi de' movimenti elementari, in cui si risolve ogni genere di moto, potrà farsene l'applicazione ai movimenti dei corpi prodotti dalla gravità.

Un gran numero d' osservazioni astronomiche hanno indicato ai dotti, che tutte le parti materiali dei corpi celesti si attraggono, tendono le une

verso le altre con un' intensità, che varia in ragion diretta dalle masse attraenti ed in ragione inversa al quadrato delle distanze che le separano. E ciò reciprocamente, vale a dire, che la quantità di moto comunicata da un corpo attraente all'altro è sempre uguale a quella che questo comunica al primo, in conformità di quel principio fondamentale posto da Newton, che l'azione è uguale e contraria alla reazione. Siffatta legge è così compiutamente confermata dai fenomeni naturali, che forma la base delle discipline meglio conosciute dagli uomini.

I matematici hanno poi dimostrato, che in un corpo composto di strati sferici omogenei, ancorchè la densità dei differenti strati fosse diversa, posta la legge testè detta, la risultante dell'attrazione è la stessa come se la massa intiera del corpo fosse riunita nel centro del medesimo.

La forza d'attrazione generale succennata, che considerata fra i corpi celesti si chiama gravitazione, prende il nome di gravità quando si esercita dal globo terrestre sui corpi che stanno alla sua superficie.

La gravità dunque è un caso speciale della gravitazione universale.

La terra si suppone approssimativamente sferica ed omogenea, e quindi la gravità dee emanare dal centro della medesima, almeno approssimativamente. Da ciò segue, che la risultante di quest'azione dee in ogni punto della superficie terrestre dirigersi al centro, ed essere conseguentemente perpendicolare alla superficie delle acque tranquille, che più d' ogni altra parte superficiale

prendono la forma sferica, com' è pienamente confermato dall'esperienza.

L'esperienza medesima ci mostra inoltre, che la gravità agisce ugualmente sopra tutti i corpi, e proporzionalmente alla loro massa, poichè li fa tutti muovere con pari velocità. Quest'ultima proposizione sembra smentita dai fatti comuni, per causa della spinta dei fluidi da basso in alto, che sottrae una porzione di peso al corpo in ragione del volume e non della massa del mobile, ma principalmente per la resistenza, che il mezzo in cui il corpo si muove oppone al moto; resistenza, che dipendendo dalla forma e dal volume de' corpi, si distribuisce diversamente alla materia secondochè varia la densità, o la quantità di massa che i corpi racchiudono sotto lo stesso volume; ma la caduta de' corpi nel vuoto, e meglio le leggi del movimento del pendolo dimostrano solennemente l'assunta dottrina.

Si noti infine, che avuto riguardo alla piccolezza delle distanze, che possono percorrere i corpi alla superficie in confronto al raggio terrestre, la legge del quadrato non può riuscire sensibile sui movimenti dei projettili, e conseguentemente la gravità dee ritenersi per una forza acceleratrice costante.

Per dimostrare questo carattere della forza in esame sperimentalmente, basterebbe costatare, che i corpi cadendo liberamente percorrono spazi proporzionali ai quadrati de' tempi impiegati. Però gravi difficoltà s'incontrano nell'eseguire l'esperienze. La resistenza dell'aria, che produce, come si è ac-

cennato, ritardi diversi pei differenti corpi; la grande celerità della caduta, che non permette la misura degli spazi. Nondimeno si sono adoperati artifizi più o meno ingegnosi per ottenere lo scopo.

Prima di tutto la celebre esperienza del piano inclinato adoperato da Galileo. La caduta de' gravi sul piano inclinato decompone la gravità, agente nel senso della verticale, in due componenti ad angolo retto, una perpendicolare al piano che rimane distrutta, l'altra parallela al medesimo che sola opera il movimento; e riducendo questo più o meno lento, permette di misurare gli spazi percorsi e diminuisce gli effetti della resistenza dell'aria senza alterare l'indole della forza motrice.

Invero se colla lunghezza del piano inclinato si rappresenti l'ipotenusa di un triangolo, i cui cateti sieno rispettivamente paralleli alla verticale ed all'orizzontale del luogo; se si chiami a l'angolo che il piano inclinato fa colla verticale, e s'indichi colla lunghezza dell'ipotenusa l'intensità della gravità assoluta, sarà facile il rilevare; che la lunghezza del cateto verticale misura l'intensità della gravità relativa sul piano inclinato, ed il cateto orizzontale quella della componente distrutta dal piano medesimo; od in altri termini, la gravità assoluta stà alla gravità relativa, stà alla componente distrutta dal piano come $1 : \cos. a : \text{sen}. a$. Questi rapporti essendo costanti per tutta la lunghezza del piano la gravità relativa dee necessariamente conservare l'indole medesima della gravità assoluta. L'angolo a, restando sempre più piccolo di 90 gradi, si può ingrandire sempre più, e così il suo coseno diverrà piccolo quan-

to si vuole, il movimento sarà sempre più lento, e la resistenza dell'aria sempre più piccola.

Galileo infatti trovò con quest'artifizio, riducendo al meno possibile gli attriti, che gli spazi percorsi sul piano inclinato da un mobile, che vi cade, sono proporzionali ai quadrati de' tempi impiegati.

Le succennate esperienze oggi si eseguiscono colla macchina d'Atwood o coll'apparato di Morin, dei quali mi limito qui ad accennare i principii sui quali si fondano.

Macchina d'Atwood — Due masse uguali m ed n son legate con un filo, il cui peso può trascurarsi, e questo filo è avvolto ad una carrucola, che ha l'asse appoggiato sopra le periferie di due coppie di ruote mobili, incrociate, per ridurre l'attrito radente della carrucola in attrito volvente. Le due masse m ed n essendo uguali tendono con pari forza a far girare la carrucola in senso inverso, e perciò si fanno equilibrio.

Se però si aggiunge una piccola massa p ad m, questa discenderà e tirerà in alto la massa n, di guisa che la massa in moto sarà $m + n + p$, ma la forza motrice sarà quella sola che la gravità imprime a p, la quale deve necessariamente distribuirsi a tutta la massa $m + n + p$; di conseguenza il movimento sarà tanto più lento della caduta ordinaria quanto più la massa p sarà piccola in confronto di $m + n + p$.

Vale a dire, che il movimento sarà rallentato, senza alterare l'indole della forza, nel rapporto di $m + n + p$ a p, il quale può variarsi nel modo più conveniente all'esperienza onde misurare gli spazi

percorsi in tempi diversi. Con questo principio e con un conveniente apparecchio si trova, che gli spazi testè detti sono proporzionali ai quadrati dei tempi impiegati: il che basta per provare che la gravità è una forza acceleratrice costante; ma l'apparecchio medesimo dà agio di verificare anche la legge della proporzionalità fra le velocità ed i tempi della caduta.

Apparato di Morin — Una pallina di metallo ha una matita che tocca leggermente una carta avvolta sulla superficie di un grosso ed alto cilindro con l'asse verticale, a cui si può comunicare un movimento uniforme di rotazione più o meno rapido. Quando la pallina cade senza che il cilindro si muova, la matita segna sulla carta una linea retta verticale, e quando si muove invece il cilindro e non la pallina si ottiene sulla carta un cerchio orizzontale. Nel primo caso la lunghezza della linea verticale starebbe ad indicare lo spazio percorso dalla pallina che cade con moto accelerato; nel secondo caso l'intiera circonferenza sarebbe segnata nel tempo che impiega il cilindro a fare una rivoluzione, ed un arco qualunque in un tempo proporzionalmente minore, che starebbe al tempo d'una intiera rivoluzione nello stesso rapporto in cui l'arco segnato stà alla circonferenza.

Si supponga ora, che in pari tempo cada la pallina e giri il cilindro, la matita disegnerà allora una linea curva compresa fra il cerchio orizzontale e la linea verticale.

Ciò posto, si stacchi dal cilindro la carta che contenga tutte e tre le linee menzionate, e si di-

stenda sopra di un piano — Il cerchio si convertirà in una linea orizzontale e perciò ad angolo retto colla verticale, e la curva compresa fra queste due linee dee necessariamente rappresentare il trasferimento uniforme nel senso orizzontale e la caduta accelerata della pallina nel senso verticale; di guisa chè una parte qualunque della curva indicherà colla sua projezione sulla linea orizzontale il tempo impiegato nella caduta, e colla sua projezione sulla linea verticale lo spazio percorso colla caduta medesima.

Or confrontando le lunghezze di queste due projezioni in rapporto alle diverse parti più o meno grandi della curva, si trova che per tre projezioni, che stieno, per esempio, come 1 : 2 : 3 sulla linea orizzontale, vi corrispondono rispettivamente sulla linea verticale le projezioni che stanno fra loro come 1 : 4 : 9 — Ma i primi numeri 1, 2 e 3 indicano i tempi, ed i numeri 1, 4 e 9 rappresentano gli spazi percorsi, dunque nella caduta della pallina gli spazi sono proporzionali ai quadrati de' tempi, e perciò la gravità è una forza acceleratrice costante — Ciò importa che le formule e le leggi che racchiudono, relative al moto uniformemente accelerato ed al moto uniformemente ritardato, si applicano esattamente alla caduta dei corpi, ed ai projettili spinti da basso in alto da forze iniziali nella direzione della verticale; non tenendo conto però della resistenza dell'aria, tanto in questo caso che nei casi seguenti. Se poi si suppone, che la forza iniziale agente sul projettile contemporaneamente alla gravità, facesse un angolo colla gravità medesima, si possono allora

distinguere due casi, secondochè la forza iniziale si supponga parallela all' orizzonte, ovvero in direzione trasversale. Nell'uno e nell'altro caso sarà facile trovare la trajettoria curvilinea che il corpo percorrerà, applicando il principio della composizione dei movimenti.

Invero quando la forza iniziale è nella direzione dell' orizzonte, il projettile deve nello stesso tempo percorrere due spazi ad angolo retto, cioè il moto uniforme nella direzione orizzontale, ed il moto uniformemente accelerato nella direzione verticale da alto in basso. Le successive lunghezze della trajettoria dovranno quindi soddisfare alla condizione di avere le projezioni sulla linea orizzontale, o direzione del tiro, proporzionali ai tempi impiegati ed alla intensità della forza iniziale, e le projezioni sulla linea verticale proporzionali ai quadrati de' tempi medesimi ed all' intensità della gravità — Una tale trajettoria sarà un ramo discendente della parabola, di cui l' origine del moto ne rappresenterà il vertice. Il che è precisamente lo stesso di ciò che avviene per la curva segnata dalla matita nell' apparato di Morin. La sua concavità dev' essere rivolta alla verticale che passa per l'origine del moto, poichè, siccome la velocità della forza orizzontale è sempre la stessa, mentre quella del moto accelerato cresce col tempo, i successivi elementi rettilinei della curva devono continuamente piegare verso la verticale.

Nell'altro caso della forza iniziale in direzione trasversale, che supponiamo diretta da basso in alto, si può considerare questa forza decomposta nel senso verticale e nel senso orizzontale. La componente

verticale congiunta all'azione della gravità produrrà nel mobile un movimento uniformemente ritardato, e la componente orizzontale un movimento uniforme. Quest' ultima componente si conserverà inalterata, mentre l'energìa della forza ascendentale andrà diminuendo nella stessa ragione che cresceva quella del caso precedente — Si avrà quindi una trajettoria simile alla precedente, colle sole differenze; che là il ramo della parabola cominciava dal vertice ed andava in giù, e qui è tracciato in senso inverso, perchè sono rovesciate le velocità del moto verticale; là la curva rivolgeva alla verticale del punto di partenza la sua concavità, qui rivolge alla verticale medesima la convessità, perchè qui, restando costante la velocità orizzontale, decresce continuamente quella verticale, e per conseguenza gli elementi successivi della curva devono necessariamente piegare verso la componente orizzontale — E ciò fintantochè non sarà dalla gravità estinta la componente verticale della forza iniziale — Quando sarà estinta, rimarrà al projettile la sola componente orizzontale, esso sarà pervenuto al vertice della parabola, ed allora la gravità si comporrà colla componente rimasta inalterata, ed il corpo descriverà l'altro ramo discendente della parabola, come è avvenuto nel primo caso.

Ho chiamato curva parabolica la trajettoria descritta dal projettile sollecitato dalla gravità e da una forza iniziale facente un angolo con essa, ma rigorosamente e matematicamente parlando essa non è parabolica, ma invece è una curva, che fa parte di un' ellisse molto allungata, uno de' fochi della quale, il più distante, è al centro della terra.

Infatti i matematici dimostrano, che ogni qual volta un corpo è sottoposto contemporaneamente alle azioni di una forza iniziale, che qui chiamasi la tangenziale, e d'una forza continua variante nella ragione inversa al quadrato delle distanze, detta la centrale, la trajettoria sarà bensì una sezione conica, ma varierà l'indole della curva col variare dell'intensità della forza tangenziale, nei termini che seguono. Le trajettorie circolari e paraboliche esigono una determinata rispettiva intensità nella forza tangenziale, mentre invece l'ellisse e l'iperbole possono essere descritte con forze tangenziali molto differenti.

Quando la forza tangenziale è meno intensa di quella ch'esige il movimento circolare, ovvero più intensa, fino a che non si giunga a quella che ci vuole pel movimento parabolico, la trajettoria sarà ellittica; nel primo caso, che è quello de' nostri projettili, il centro d'attrazione sarà nel foco più distante dall'origine del movimento, nel secondo caso il centro medesimo sarà nel foco più vicino — Od in altri termini, il mobile, riferendoci all'attrazione solare, sarà più vicino all'afelio nel primo caso, e più vicino al perielio nel secondo. L'iporbole sarà descritta in tutti i casi in cui la forza tangenziale sarà maggiore di quella che determina il movimento parabolico.

Le leggi della gravità si dimostrano sperimentalmente e con sufficiente esattezza per mezzo degli apparecchi succennati, ma il valore assoluto ed esatto della gravità medesima mal potrebbesi determinare con essi, perchè riesce difficile valutare

con precisione l' effetto degli attriti — Onde assegnare con esattezza il valore testè detto, in rapporto ai diversi punti della superficie terrestre, e per fare un' altra applicazione delle leggi del moto si accennano qui le nozioni sulla teoria del pendolo.

Da quanto fu detto sulla caduta de' corpi in un piano inclinato risulta, che la gravità assoluta stà alla gravità relativa del detto piano nello stesso rapporto che la lunghezza stà all'altezza del medesimo, ossia $L : A :: g : g' = \frac{gA}{L}$. Or se nella formula $v = \sqrt{2gs}$ si sostituisce alla gravità assoluta il valore della gravità relativa, ed allo spazio percorso dal mobile la lunghezza del piano, si ottiene $v = \sqrt{2gA}$. La velocità dunque, che acquista un corpo cadendo per la lunghezza del piano inclinato risulta uguale a quella che il corpo medesimo acquisterebbe cadendo liberamente per l' altezza del piano stesso.

Or potendosi le linee curve considerare costituite da una serie di elementi rettilinei infinitamente piccoli, che cangiano di direzione per angoli differenti da 180° di una quantità infinitesima, la caduta de' corpi per archi di curva si può rappresentare con quella che ha luogo su piani inclinati successivi nella condizione testè detta.

Ciò posto, consideriamo il movimento d'un corpo pesante unito ad un punto fisso con un' asta rigida ed inestendibile, intorno al quale può liberamente girare, descrivendo una curva circolare, il cui centro stà conseguentemente nel punto fisso, ed il cui raggio è rappresentato dalla lunghezza dell'asta. È

questo quello strumento, che dicesi pendolo. — Per trovare le leggi del suo movimento fa d'uopo supporre per ora un pendolo ideale, che risulti cioè da un sol punto materiale pesante e da un'asta senza peso, il quale chiamasi in meccanica un pendolo semplice. Se il punto materiale è allontanato dalla sua posizione d'equilibrio stabile per una distanza più o meno grande, la gravità tende a ricondurvelo facendogli descrivere l'occorrente arco di cerchio. Questo movimento è identico a quello della caduta per un arco circolare, colla sola differenza, che qui si sostituisce la resistenza dell'asta a quella che dovrebbero opporre i successivi elementi rettilinei del circolo per distrurre le successive componenti della gravità perpendicolari ai medesimi, e lasciare l'azione del moto alle sole componenti parallele.

Ora se in un istante qualunque della discesa del punto materiale si suppone decomposto l'impulso della gravità in due componenti, una in senso opposto alla direzione dell'asta, che sarà distrutta dalla medesima, e l'altra ad angolo retto colla prima, che rappresenterà la tangente a quel punto del circolo, sarà facile il vedere che quest'ultima componente è proporzionale al seno dell'angolo, che la direzione dell'asta fa colla gravità. — Da ciò segue, che il punto materiale discenderà verso la sua posizione d'equilibrio per impulsi successivamente decrescenti come i seni degli angoli che restano a percorrersi, e perciò si muoverà con moto accelerato, ma non uniformemente accelerato.

Quand'esso sarà giunto alla sua posizione d'equilibrio avrà acquistato una velocità, che gli farà ol-

trepassare quella posizione e descrivere, ascendendo, un altro arco dal lato opposto — In questa parte ascendente della sua trajettoria la gravità agisce come forza ritardatrice, e sottraendo al corpo in ordine inverso tutte le parziali accelerazioni comunicategli nella discesa gli permetterà di salire alla medesima altezza da cui è disceso — Allora ricomincia la stessa serie d'azioni, di guisa che il pendolo continuerebbe così ad oscillare eternamente ed uniformemente se non fossero la resistenza dell'aria e gli attriti, che diminuendo successivamente l'ampiezza delle sue oscillazioni lo mettessero finalmente in riposo.

Però in siffatte oscillazioni, successivamente d'ampiezza decrescente, la durata del tempo si mantiene costante, allorchè gli archi del cerchio, che si considerano, non oltrepassano un piccolo numero di gradi. L'indipendenza del tempo d'un oscillazione dall'ampiezza della medesima, dentro i limiti testè detti, cioè di 2 o 3 gradi, risulta dalla seguente considerazione.

Si è detto innanzi, che le gravità relative ai successivi elementi del circolo sono proporzionali ai seni degli angoli, che la direzione dell'asta del pendolo fa colla gravità nelle diverse posizioni — Ma quando gli angoli sono molto piccoli i seni si confondono sensibilmente con gli archi misuratori degli angoli medesimi; dunque nell'ipotesi ammessa, che le oscillazioni non superino un piccolo numero di gradi, si può ritenere che le gravità relative sieno proporzionali agli archi che si devono tuttavia percorrere per raggiungere la posizione d'equilibrio. —

Ammesso ciò, la diversa estensione degli archi, variando l'ampiezza dell' oscillazione, sarà percorsa in tempi uguali, perchè gl' impulsi successivi saranno sempre proporzionali all' estensione medesima.

Il fenomeno stesso può anche essere dichiarato in quest' altro modo. Una delle singolari proprietà della curva cicloidale è quella, che i corpi cadenti per archi della medesima giungono al basso della corsa nello stesso tempo qualunque sia l'estensione dell'arco, appunto perchè nella cicloide le gravità relative ai diversi elementi della curva sono sempre proporzionali all'estensione dell' arco interposto fra il punto che si considera e l'elemento orizzontale.

Or siccome per un piccolo numero di gradi gli archi circolari si confondono sensibilmente cogli archi cicloidali, così l'enunciata proprietà della cicloide si può estendere agli archi minimi circolari.

I matematici, nella cennata ipotesi, che l' ampiezza dell' oscillazione non superi un piccolo numero di gradi, hanno dato la formola $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, indicando con l la lunghezza del pendolo semplice che consideriamo e con π il rapporto del diametro alla circonferenza. Questa formola dimostra l' isocronismo delle oscillazioni, e l'uguaglianza d'azione della gravità sopra i corpi di natura diversa, poichè è indipendente, e dall' ampiezza dell' oscillazione e dalla natura del corpo pesante da cui è costituito il pendolo in esame.

È facile inoltre rilevare le altre leggi, che nella formola medesima sono comprese, vale a dire, se

il tempo di un' oscillazione è costante la gravità varia proporzionalmente alla lunghezza del pendolo; la stessa gravità varia in ragione inversa al quadrato di t quando l rimane costante; ma se si conserva costante la gravità, la durata dell'oscillazione varia come la radice quadrata della lunghezza del pendolo.

Tutto ciò è riferibile al pendolo ideale. Andiamo ora al pendolo reale, che dicesi composto, perchè il corpo che oscilla e l'asta che lo sostiene unito ad un punto fisso o ad un asse orizzontale, risultano da un numero più o meno grande di punti materiali.

Questi punti hanno distanza diversa dall' asse di sospensione, e perciò oscillerebbero in tempi diversi se fossero liberi, giusta le leggi succennate. L'oscillazione dei punti vicini al nominato asse sarebbe più rapida di quella dei più lontani; ma legati come sono invariabilmente, i primi saranno ritardati dalla resistenza de' secondi, e questi accelerati dagl' impulsi de' primi, sicchè il pendolo prenderà un movimento intermedio, determinato dal risultamento di queste mutue azioni, che fissa la durata delle oscillazioni del pendolo composto. Or se si considera la materia del pendolo, dai punti più alti a quelli più bassi, devesi necessariamente ammettere, che per passare dai punti ritardati a quelli accelerati si devono incontrare i punti di transizione, che non sono accelerati, nè ritardati, e che conseguentemente oscillano come se fossero liberi. Cotali punti dovendo essere ugualmente distanti dall' asse di sospensione devono essere compresi in una linea parallela all' asse medesimo, chiamata asse di oscillazione. È chiaro da ciò, che il pendolo com-

posto oscilla come oscillerebbe un pendolo semplice la cui lunghezza fosse uguale alla distanza che separa i due anzidetti assi. Ed è appunto questa distanza che si dee prendere per lunghezza del pendolo composto onde poter applicare al medesimo la formola $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ e le leggi che racchiude. L'asse d'oscillazione gode della proprietà di potere sostituirsi all' asse di sospensione senza alterare la durata delle oscillazioni, il che offrirebbe un mezzo per determinare a tentone la cercata lunghezza del pendolo, ma la meccanica insegna mezzi più precisi per questa determinazione.

Una volta che sarà nota la lunghezza del pendolo composto, sarà facile calcolare l' intensità della gravità per un dato punto della superficie terrestre, sostituendo nella formola $g = \frac{\pi^2 l}{t^2}$, che risulta dalla risoluzione della $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, il valore di l e quell' altro di t, il quale non presenta difficoltà per la determinazione, bastando per la sua esattezza il contare il numero delle oscillazioni che si verificano in un tempo alquanto lungo, ed il dividere questo tempo pel numero stesso.

Spesso però, onde calcolare il valore della gravità basta di conoscere il rapporto della medesima con quella nota di un altro luogo, allora chiamando N il numero delle oscillazioni, che il pendolo eseguisce in un dato tempo T, converrà mettere la formola in esame sotto la forma $\frac{T}{N} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, dal-

la quale si rileva, che le intensità della gravità in due luoghi diversi, conservando costante la lunghezza del pendolo, stanno fra loro come i quadrati dei numeri delle oscillazioni, che il pendolo compie nei luoghi medesimi e nello stesso tempo T.

Quando poi si vuol conoscere la lunghezza che deve avere un pendolo per battere i secondi in un dato luogo, basta fare $t = 1$, e la formola $l = \frac{g}{\pi^2}$ darà la lunghezaa cercata, conoscendosi la gravità, a cui è proporzionale.

Col pendolo, con questo prezioso strumento, fatte le debite correzioni, sia per la perdita di una parte del suo peso dovuta all' immersione nell' aria, sia ancora per l'influenza del suo movimento, che fa aumentare la detta perdita, si è calcolato, che la gravità a Parigi s' esprime da metri 9,8096, e che per conseguenza lo spazio percorso da un corpo che cade nel vuoto per un secondo di tempo, è rappresentato da metri 4,9048.

Si è conosciuto collo stesso mezzo l' aumento nell' intensità della gravità dall'equatore ai poli — Aumento prodotto dalla forma della terra, e dalla forza centrifuga, la quale diminuisce dall' equatore al polo, non solamente per la successiva diminuzione de' raggi dei paralleli, ma eziandìo per la sua crescente obliquità colla verticale del luogo.

Col pendolo Foucault ha data una dimostrazione sperimentale del movimento diurno della terra, appoggiata al movimento del piano d'oscillazione.

In base al valore della gravità determinata dal pendolo si è calcolata la distanza del centro della

terra, in rapporto ai diversi punti della sua superficie, e quindi la forma della terra medesima.

Non minore importanza presenta la teoria del pendolo nell'acustica. La legge dell'oscillazione pendolare è la più semplice delle altre oscillazioni o vibrazioni che dir si vogliano, e nella stessa guisa che un movimento composto si risolve nei movimenti elementari uniforme ed uniformemente accelerato, una vibrazione composta si risolve in oscillazioni semplici, che sono le pendolari.

Infatti da un celebre teorema di Fourier risulta, che la curva rappresentante la legge d'oscillazione di un corpo elastico può sempre decomporsi in un sistema di curve pendolari, nelle quali le durate delle oscillazioni sieno tutte parti aliquote d'una di esse, di quella cioè che rappresenta la durata d'oscillazione del corpo dato. Ma quello che più sorprende in siffatto argomento si è, che mentre l'analisi algebrica dà i risultamenti testè detti, l'orecchio nostro mirabilmente armonizzando con essi, per un'azione anatomico-fisiologica, decompone i movimenti vibratori composti, che l'aria comunica alla membrana del timpano, nei movimenti pendolari da cui risultano; e perciò nell'ascoltare i suoni degli strumenti, generalmente composti, ci fa sentire il suono primario o fondamentale accompagnato dalla serie più o meno completa de' suoni armonici, le cui durate delle oscillazioni sono $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ec. di quella del suono fondamentale; giusta la legge annunziata, prima da Ohm e quindi illu-

strata e verificata, fin dove è stato possibile, dall'Helmholtz, le cui belle esperienze hanno dato molta luce alla teoria dell'acustica, non solo nell'argomento ora detto, ma principalmente sulla vera spiegazione dei suoni di combinazione, che si producono nei casi, in cui l'applicabilità del principio della sovrapposizione dei piccoli movimenti non ha più luogo. E ciò tanto in rapporto ai suoni di combinazione per differenza indicati dall'italiano Tartini, quanto a quelli per sommazione dall'Helmholtz medesimo scoperti e dichiarati.

Coronate tutte queste esperienze da una felice ipotesi sulla conformazione dell'orecchio nella sua più delicata parte, colla quale esso presenta all'anima tutti gli accidenti de' suoni. Ipotesi, che appoggiata dai fatti offerti dai corpi vibranti, spiega benissimo la legge di Ohm, e la ragion di essere delle ondate, dei battimenti, delle consonanze, e delle dissonanze, sia che derivino quest'ultime dalla poca distanza musicale dei suoni fondamentali fra loro, o da quella che può emanare dalla coesistenza dei suoni fondamentali medesimi coi loro armonici e coi suoni di combinazione.

Prof. Clemente Pollina.